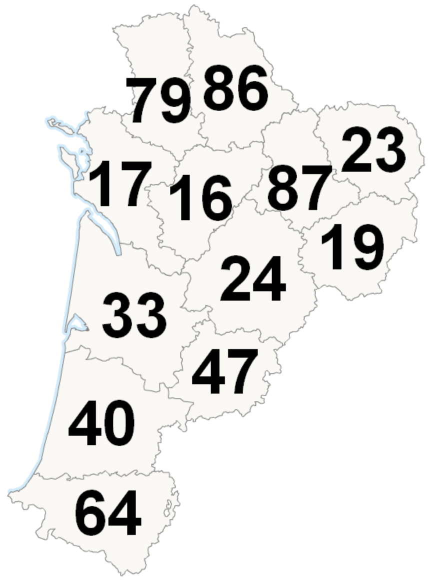
Corrigé du sujet collège 2019

Voyage en Nouvelle-Aquitaine

Trois amis du Limousin veulent parcourir la région Nouvelle-Aquitaine, née de la fusion des anciennes régions :

- *Aquitaine (départements numéros 24, 33, 40, 47 et 64),*
- *Limousin (départements numéros 19, 23 et 87),*
- *Poitou-Charentes (départements numéros 16, 17, 79 et 86).*



Ils se sont fixé les règles suivantes :

- *le parcours doit commencer dans un département du Limousin,*
- *le parcours doit visiter tous les départements de la région Nouvelle-Aquitaine sans jamais la quitter,*
- *le parcours ne doit pas repasser par un département déjà visité.*

1) Où le parcours doit-il se terminer ?

Le parcours doit se terminer dans le département 64.
En effet il faut passer par ce département et pour y arriver il faut passer par le département 40. Comme on ne peut pas passer deux fois par le département 40, le voyage doit se terminer dans le département 64.

2) Donnez un parcours avec le moins possible de franchissements de limites d'anciennes régions. Pour cela on donnera la liste des numéros des départements dans l'ordre choisi.

Il y a trois anciennes régions, le minimum est donc de deux franchissements de limites d'anciennes régions. On essaie de parcourir tous les départements d'une ancienne région avant de passer à la suivante. Comme on doit commencer en Limousin et terminer par 64 en Aquitaine, l'ordre de franchissement des régions est Limousin, Poitou-Charentes et Aquitaine.

On observe qu'à l'intérieur du Limousin, 23 ne peut pas être en dernier et que si on sort du Limousin par 19, on ne peut aller qu'en Aquitaine, donc c'est 87 qui termine le Limousin.

C'est possible par exemple avec la liste suivante :
19, 23, 87, 86, 79, 17, 16, 24, 47, 33, 40, 64.

Il existe au total 22 parcours qui n'ont que deux franchissements de limites d'anciennes régions, ils sont décrits dans le diagramme suivant en allant de la gauche vers la droite :

```
                          17  →  16             47  →  33
                          /            \      /             \
19 → 23                79                  24                 40 → 64
        \              /  \               /    \              /
          87  → 86         16           /       33          /
         /  \        \         \      /             \     /
23 → 19      \         16         17                   47
               \          \    /       \             /
                \         79              33 → 24
                 \        /
                  16 → 86
```

3) Donnez un parcours avec le plus possible de franchissements de limites d'anciennes régions.

Si on veut franchir 2 fois la limite du Limousin, on doit sortir par un département puis entrer et sortir par un autre. Seul 87 répond à cette deuxième condition. Donc on sort par 19 et entre par 87 après avoir franchi la limite Aquitaine/Poitou-Charente, ce qui donne 23-19-24-16-87-86 et il y a ensuite une seule façon de terminer. On a franchi 5 limites.

Si on ne franchit qu'une fois la limite du Limousin, on peut ensuite franchir au plus 2 fois celle de Poitou-Charente.

Il existe un unique parcours avec 5 franchissements de limites d'anciennes régions (notation ╫) et c'est le maximum :

23 → 19 ╫ 24 ╫ 16 ╫ 87 ╫ 86 → 79 → 17 ╫ 33 → 47 → 40 → 64

4) Dans le parcours, on souhaite qu'un numéro de département impair ne soit jamais précédé et suivi par un numéro pair, et qu'un numéro de département pair ne soit jamais précédé et suivi par un numéro impair. Donnez un parcours qui convient.

Il faut toujours au moins deux numéros pairs qui se suivent ou deux numéros impairs qui se suivent. Dans les parcours de la question 2, il n'existe que 4 possibilités.

```
19 → 23  \
           87
23 → 19  /     \
                 24 → 16 → 86 → 79 → 17 → 33 → 47 → 40 → 64
23 → 87  \     /
           19
87 → 23  /
```

Il n'y a pas d'autres possibilités, parce que si on intercale un impair dans le triplet 24, 16, 86, la règle n'est plus respectée.

Les bons trios

1. On considère les entiers qui sont des nombres à trois chiffres différents et non nuls et qui sont multiples de 3. Quels sont les trois plus petits ? Quels sont les trois plus grands ? Justifiez-le.
Un entier est multiple de 3 si la somme de ses chiffres est multiple de 3.
Le plus petit entier à trois chiffres différents et non nuls est 123. Comme il est multiple de 3 c'est lui le plus petit. Les deux entiers suivants qui sont multiples de 3 s'obtiennent en ajoutant 3 puis 3.
Donc les trois plus petits multiples de 3 sont **<u>123, 126 et 129</u>**.

Le plus grand entier à trois chiffres différents et non nuls est 987. Comme il est multiple de 3 c'est lui le plus grand. Les deux entiers précédents qui sont multiples de 3 sont 984 et 981.
Donc les trois plus grands multiples de 3 sont **<u>987, 984 et 981</u>**.

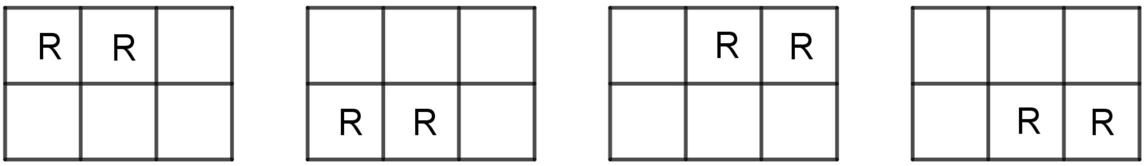
2. On considère les entiers qui sont des nombres à trois chiffres différents et non nuls et qui sont multiples de 9. Quels sont les trois plus petits ? Quels sont les trois plus grands ? Justifiez-le.

Un entier est multiple de 9 si la somme de ses chiffres est multiple de 9.
Ce n'est pas le cas de 123 ; c'est donc 126 le plus petit entier à trois chiffres différents et non nuls qui soit multiple de 9. Les deux entiers suivants qui sont multiples de 9 s'obtiennent en ajoutant 9 puis 9, ce sont 135 et 144. Mais 144 n'a pas trois chiffres différents, donc il faut encore ajouter 9 pour obtenir 153.
Donc les trois plus petits multiples de 9 sont **<u>126, 135 et 153</u>**.

Le plus grand entier à trois chiffres différents et non nuls qui soit multiple de 9 est 981 (987 et 984 ne conviennent pas). On obtient les suivants en retranchant 9 puis encore 9, ce sont 972 et 963.
Donc les trois plus grands multiples de 9 sont **<u>981, 972 et 963</u>**.

Jouons avec des cubes

On dispose de petits cubes blancs et de petits cubes rouges, tous d'arête 1 cm. En assemblant 6 de ces petits cubes on forme des pavés d'arêtes 1, 2 et 3 cm. Deux pavés sont considérés comme identiques si on peut passer de l'un à l'autre en les tournant ou en les retournant. Par exemple les quatre pavés suivants sont identiques (on a seulement dessiné la face supérieure des pavés) :



On passe par exemple du premier au second en le basculant vers l'avant de façon que la face supérieure passe en-dessous.

1. Quels sont les pavés différents que l'on peut former avec 1 cube rouge et 5 blancs ?
On représentera chaque pavé comme ci-dessus.

Il n'y a que deux possibilités pour placer le cube rouge : soit il est à un angle du pavé, soit il est au milieu d'un grand côté. Il y a donc deux pavés différents :

R		

	R	

2. Quels sont les pavés différents que l'on peut former avec 2 cubes rouges et 4 blancs ?

Première possibilité, les deux cubes rouges sont sur une même rangée horizontale :

R		R

R	R	

Deuxième possibilité, un cube rouge sur chaque rangée horizontale :

R		
R		

	R	
	R	

R		
	R	

R		
		R

3. Quels sont les pavés différents que l'on peut former avec 3 cubes rouges et 3 blancs ?

Première possibilité, les trois cubes rouges sont sur une même rangée horizontale :

R	R	R

Deuxième possibilité, deux cubes rouge côte à côte sur une rangée horizontale :

R	R	
R		

R	R	
	R	

R	R	
		R

Troisième possibilité, deux cubes rouge espacés sur une rangée horizontale :

R		R
R		

R		R
	R	

4. Combien de pavés différents peut-on former avec 6 cubes rouges ou blancs ?
Le nombre de cubes rouges peut varier de 0 à 6.

Il y a une seule possibilité avec 0 cube rouge et une seule possibilité avec 6 cubes rouges.

On a trouvé deux possibilités avec 1 cube rouge, donc également deux possibilités avec 5 cubes rouges (en échangeant rouges et blancs).

On a trouvé six possibilités avec 2 cubes rouges, donc également six possibilités avec 4 cubes rouges (en échangeant rouges et blancs).

On a trouvé six possibilités avec 3 cubes rouges et donc 3 cubes blancs.

Au total cela fait 1 + 1 + 2 + 2 + 6 + 6 + 6 = **24 possibilités**.

Mosaïque

On dispose de 16 petits carrés de côté 1 cm : 4 carrés blancs, 4 noirs, 4 rouges et 4 verts.
On forme un grand carré avec ces petits carrés de façon que dans chaque rangée horizontale, dans chaque rangée verticale et sur chacune des diagonales du grand carré on ait des carrés de couleurs différentes, disposés dans n'importe quel ordre. On pourra noter les couleurs par B, N, R et V.
Donnez deux solutions au problème.

Plaçons dans la première ligne B, N, R et V dans cet ordre. Pour la deuxième ligne on ne peut pas placer le B en premier (il y aurait deux B dans la première colonne) ni en deuxième (il y aurait deux B dans la diagonale descendante). Il y a deux possibilités.
Première possibilité : on place le B de la deuxième ligne en troisième position. Pour la diagonale montante il reste à placer R et N, donc forcément N en première colonne et R en seconde :

B	N	R	V
		B	
	R		
N			

On termine forcément la première colonne par R en seconde ligne et V en troisième ligne, puis la seconde ligne par V en seconde position et N en quatrième, puis la troisième ligne par N en troisième et B en quatrième et enfin la quatrième ligne par B en seconde position, V en troisième et R en quatrième. Le carré obtenu est bien conforme à ce qui est demandé, chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales contient B, N, R et V .

B	N	R	V
R	V	B	N
V	R	N	B
N	B	V	R

Deuxième possibilité : on place le B de la deuxième ligne en quatrième position. En troisième ligne le B ne peut être qu'en deuxième position (car pas en première colonne, ni en dernière colonne, ni sur la diagonale descendante). En quatrième colonne le B est alors en troisième position :

B	N	R	V
			B
	B		
		B	

En diagonale montante on doit placer le R en première colonne et le N en troisième colonne.
On termine la troisième colonne par V en troisième ligne. On termine la première colonne par V en seconde ligne et N en troisième, puis la seconde par R en seconde ligne et V en quatrième et enfin la quatrième colonne par R en troisième ligne et N en quatrième.

Le carré obtenu est bien conforme à ce qui est demandé, chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales contient B, N, R et V .

B	N	R	V
V	R	N	B
N	B	V	R
R	V	B	N

Calculez le nombre de solutions.

On a montré qu'il existe exactement deux solutions avec B, N, R et V dans cet ordre en première ligne. En permutant B, N, R et V dans la première ligne on obtient au total 24 permutations différentes. 6 ont B en premier :
B, N, R,V ;B, N, V, R ; B, R, N,V ; B, R, V, N ; B, V, N, R ; B, V, R, N.
Il y en a également 6 avec N en premier, 6 avec R en premier et 6 avec V en premier.
Pour chacune des 24 possibilités pour la première ligne il existe 2 tableaux différents. Il y a donc finalement **48 solutions** au problème posé.